ИНФОРМАТИКА

УДК 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОПУСТОТНЫХ ПЛИТ В СТРУКТУРЕ КАРКАСНОГО ЗДАНИЯ

К.С. Курочка, Д.Н. Трубенок, И.Л. Стефановский

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

SIMULATION OF NATURAL OSCILLATIONS IN THE HOLLOW-CORE SLABS IN STRUCTURE OF THE FRAME BUILDINGS

K.S. Kurochka, D.N. Trubenok, I.L. Stefanovsky

P.O. Sukhoi Gomel State Technical University

Рассмотрена математическая модель воздействия импульсной нагрузки на многопустотную плиту, которая является составной частью конструкции каркасного здания. В результате получены данные распространения собственных колебаний в исследуемой конструкции с течением времени.

Ключевые слова: *свободные колебания*, *многопустотная плита*, *метод конечных элементов*.

A mathematical model of the impact impulse load on the hollow-core slabs, which is an integral part of the design of the frame of the building, is considered. As a result, data on the occurrence of the natural oscillations in the studied construction with the passage of time are obtained.

Keywords: *natural oscillation*, *hollow-core slabs*, *finite element method*.

Введение

В настоящее время широкое распространение получили каркасные здания, основным конструктивным элементом которых является многопустотная плита. Из-за повсеместного применения плит данного типа решается большое количество задач в целях увеличения срока эксплуатации и прочности этого конструктивного элемента. Одной из таких задач является моделирование собственных колебаний многопустотных плит в структуре каркасного здания.

При прочностных расчетах на устойчивость подобных сооружений проектировщикам необходимо проводить вычисления собственных колебаний многопустотных плит, составляющих диски перекрытий. Собственные колебания, возникающие под действием внешней нагрузки, приводят к возникновению трещин и разрушению конструкции. По этой причине инженер-проектировщик должен производить расчет конструкций на обнаружение воздействий данного физического процесса для определения предельно допустимых биений при воздействии нагрузки определенной величины.

Главная проблема существующих алгоритмов и методик расчетов заключается в том, что они не являются универсальными, то есть применяются для конкретной физической модели.

1 Физическая постановка задачи

Для решения задачи о собственных колебаниях плиты применяется физическая модель, которая представляет собой плиту, закрепленную со всех сторон. Перпендикулярно к ее поверхности приложена внешняя нагрузка (F).

При воздействии возмущающей силы, зависящей от времени $F(t)$, на поверхность многопустотной плиты в ней возникают свободные колебания $\{\Psi\}$. Также плита из-за воз-действия внешней нагрузки совершает перемещения, зависящие от времени $\delta(t)$. Данный физический процесс можно описать следующим уравнением:

$$u(t)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i(t)\{\Psi\}_i=[\Phi]\delta(t),$$

где $[\Phi]$ – матрица, столбцы которой представляют собой векторы свободных колебаний системы $\{\Psi\}_i$ (i = 1, 2, …, n), $u(t)$ – амплитуда колебаний.

В общем случае в уравнения движения вводится вязкое сопротивление, так что эти уравнения принимают вид [1]:

$$[K]\{\delta\}+[C]\frac{\partial\{\delta\}}{\partial t}+[M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\}+\{F(t)\}=0, \quad (1.1.)$$

где $[K]$ – матрица жесткости, $[C]$ – матрица демпфирования, $[M]$ – матрица масс, $\{\delta\}$ – вектор узловых перемещений.

В рамках задачи об импульсных нагрузках постоянное воздействие внешней нагрузки *F(t)* заменяется импульсом силы, который вычисляется по формуле [2, с. 512]:

$$F(t)=F_0\int_0^{\tau}f(t)dt,$$

где F_0 – величина нагрузки, τ – продолжительность действия импульсной нагрузки.

Из-за того, что существует множество форм импульса $f(t)$ [2, с. 513], по которым можно определить импульсную нагрузку, будет выбрана конкретная, которую наиболее удобно применить для решения задачи:

$$f(t)=1,$$

отсюда следует:

$$F(t)=F_0\int_0^\tau 1dt=F_0\tau.$$

Предположим, что существует решение уравнения (1.1), при котором вектор узловых перемещений $\{\delta\}$ принимает следующую форму:

$$\{\delta(t)\}=\{\delta_0\}e^{at}.$$

Произведем подстановку этого выражения в уравнение (1.1) и получим уравнение [1], [2]:

$$([K]+a[C]+a^2[M])\{\delta_0\}+\{F\}=0, \quad (1.2)$$

где a – мнимая величина, то есть имеет вид

$$a=i\omega.$$

Тогда $e^{at}=e^{i\omega t}=\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)$.

В общем случае вектор $\{\delta_0\}$ является комплексным, следовательно:

$$\{\delta_0\}=\{\delta_x\}+i\{\delta_y\}, \quad (1.3)$$

$\{\delta_x\}$, $\{\delta_y\}$ – вещественная и мнимая части вектора узловых перемещений.

После установления начальных и граничных условий необходимо свести задачу к решению линейных алгебраических уравнений. Для этого необходимо подставить выражение (1.3) в уравнение (1.2), тогда его можно записать в виде [1, с. 372]:

$$\begin{bmatrix}[K]-\omega^2[M] & -\omega[C]\\ -\omega[C] & [K]-\omega^2[M]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_x\\ \delta_y\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}F\\ 0\end{Bmatrix}. \quad (1.4)$$

Для нахождения форм собственных колебаний в начальный момент времени, следует подставить полученные значения, в ходе решения методом Гаусса уравнения (1.4), в формулу:

$$\{\delta\}=\{\delta_x\}\cos(\omega t)+\{\delta_y\}i\sin(\omega t), \quad (1.5)$$

где t – время.

Для нахождения затухающих колебаний необходимо применить вариационнй принцип [2, с. 515]:

$$u_j=\sum_{i=1}^{n}U_{ji}e^{-\frac{\gamma}{2}\omega t}\sin(\omega t),(j=1,..,n), \quad (1.6)$$

где U_{ji} вычисляется с использованием форм собственных колебаний δ_{ji}, найденных в уравнении (1.5) при $t=0$, по формуле:

$$U_{ji}=\frac{\delta_{ji}}{\omega}\sum_{r=1}^{m}\varepsilon\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right)\delta_{jr}F_0\tau, \quad (1.7)$$
$$(j=1,..,n;\ i=1,..,n).$$

2 Математическое моделирование

Будем дискретизировать исследуемую область конечными элементами [1–4] в форме прямоугольника с тремя степенями свободы (перемещение вдоль оси Oz, и углы поворотов вдоль осей Ox и Oy) в каждом узле. Выбор этого конечного элемента обусловлен следующими преимуществами: данное разбиение легко реализуется; при таком разбиении легко учесть граничные условия и благодаря этому уменьшается погрешность вычислительных экспериментов.

Чтобы приближенно удовлетворить условию непрерывности угла наклона [1], [3], в качестве узловых параметров рассматриваются три компоненты: перемещение (Ω_n) вдоль оси z; углы поворота $(\theta_y)_n$ – вокруг оси y; $(\theta_x)_n$ – вокруг оси x. Так как конечный элемент – прямоугольник, то углы наклона ω и углы поворота совпадают, поэтому можно записать:

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix}\Omega_i\\ \Theta_{xi}\\ \Theta_{yi}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Omega_i\\ -\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_i\\ \left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_i\end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

Для отдельного конечного элемента уравнение (2.1) можно записать в виде:

$$\{\delta\}=[A]\{\alpha\}, \quad (2.2)$$

где $[A]$ – координатная матрица, составленная из координат улов элемента, $\{\alpha\}$ – вектор искомых коэффициентов.

Из выражения (2.2) можно найти $\{\alpha\}$:

$$\{\alpha\}=[A]^{-1}\{\delta\}.$$

Для получения глобальных матриц жесткости, демпфирования и масс необходимо добавить значения соответствующих локальных матриц, принадлежащих конечным элементам. Нахождение глобальных матриц производится путем занесения значений из узлов, принадлежащих конечному элементу в узел принадлежащий пластине, если они совпадают, то значения суммируются.

3 Результаты исследований и их обсуждения

Начальные условия, определяющие величины усилий при заданных условиях закрепления (при изгибе плиты – это изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы). Так как в рассматриваемой физической модели защемлены все края, поэтому начальные условия равны:

$$w=0;\ \frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Узловые перемещения, полученные после решения уравнения (1.5), используются для нахождения форм собственных колебаний (1.7). Затем полученные формы колебаний подставляются в уравнение (1.6). В ходе решения этого уравнения, будут получены значения перемещений (или амплитуды колебаний).

Для проверки методики нахождения собственных колебаний рассматривается фрагмент перекрытия, состоящий из двух многопустотных плит ПК 63.15.8АТ800АТ-8 с: длиной – 6.2 м, шириной – 1.49 м, высотой – 0.22 м, отверстием в середине пролёта, рабочей арматурой 5Ø12АТ800. Плита имеет 7 отверстий диаметром 159 мм, защитный слой бетона 20 мм. Загружение проводилось от 0 Н/м^2 до 4532 Н/м^2. Найденные значения прогибов сравнивались с экспериментальными данными [5]. При нагрузке 3286 Н/м^2 прогиб в нижней растянутой зоне в середине пролета равен 15,14 мм [5, с. 61], в ходе вычислительного эксперимента он составил 13,17 мм. При нагрузке 4532 Н/м^2 прогиб в середине пролета составил 20.6 мм [5, с. 61], в ходе вычислительного эксперимента он составил 17,9 мм.

Фрагмент перекрытия дискретизировался по длине на 20 конечных элементов, по ширине – на 14. Результат моделирования с величиной нагрузки 3286 Н представлен на рисунке 3.1.

Рисунок 3.1 – Колебания многопустотных плит ПК 63.15.8АТ800АТ-8 под действием внешней нагрузки

В результате моделирования были получены результаты, расхождение которых с экспериментальными данными [5] составляет 15%. Это говорит о том, что результаты, производимые по представленной математической модели, вычисляются с высокой точностью.

Заключение

В ходе исследовательской работы предложена математическая модель, отличающаяся от существующих аналитических решений поставленной задачи, и разработано программное обеспечение для нахождения собственных колебаний многопустотных плит.

Одним из основных достоинств разработанной математической модели является ее универсальность. Так как можно, варьируя начальные и граничные условия, а также изменяя место и характер приложения внешней нагрузки, решать различные задачи, связанные с исследуемым видом конструкции. Также, внеся незначительные изменения в разбиение на конечные элементы и сменив физические характеристики материала можно решить абсолютно новую задачу (например, задачу о биениях, возникающих в тормозной системе автомобиля).

Предложенная математическая модель может быть использована при проектировании каркасных зданий для определения наиболее подходящего типа многопустотных плит, которые необходимо применить для конкретного проекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкевич*, *О.С.* Метод конечных элементов в технике: учебник / О.С. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

2. *Перельмутер*, *А.В.* Расчётные модели сооружений и возможность их анализа: учебник / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – Киев: Сталь, 2002. – 596 с.

3. *Александров*, *А.В.* Сопротивление материалов: учебник / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: Высшая школа, 2003. – 560 с.

4. *Курочка*, *К.С.* Численное моделирование деформаций многопустотных плит / К.С. Курочка // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2002. – № 6 (15). – С. 44–48.

5. *Пространственные конструктивные системы зданий и сооружений, методы расчета, конструирования и технология возведения* / Труды международной научно-технической конференции, Минск, 10–12 октября 2001 г. / Минск: институт БелНИИС; редкол.: А.И. Мордич [и др.]. – Минск, 2002. – 287 с.

Поступила в редакцию 07.07.15.